№ 14-дәріс.

Тақырыбы: Функцианалдық қатарлар. Жинақтылық облысы. Вейерштрасстың қалыпты жинақтылық белгісі. Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы. Жинақтылық интервалы мен радиусы.

Анықтама 1. Функционалдық қатар деп:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots , \qquad (1)$$

мұндағы $u_i(x),\ i = 1,2,\dots$ қатардың мүшелері функциялар болатын қатарды айтамыз.

x қандай да бір тұрақты мән берсек, (1) қатары сандық қатарға айналады. Сонымен, x -тің қандай да бір мәндерінде (1) қатары жинақты, қандай да бір мәндерінде жинақсыз.

Анықтама 2. (1) қатары жинақты болатын x мәндер жиыны функционалдық қатардың жинақтылық облысы деп аталады.

Қатардың жинақтылық облысында қатардың қосындысы x -ке байланысты функция болатындықтан, қатардың қосындысын $S(x)$ деп белгілейміз.

Мысал 1. $|x| < 1$ болған жағдайда, $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ қатары жинақты. Себебі, бұл қатар кемімелі геометриялық прогрессия ($a_1 = 1,\quad q = x$) және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$. Сонымен, (-1,1) интервалында берілген қатар жинақты және

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots .$$

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ болса, онда $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ - қатардың қалдық мүшесі.

Теорема 1. (1) қатарының жинақтылық облысында:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [S(x) - S_n(x)] = 0 .$$

Бірқалыпты жинақтылық. Функционалдық қатарларға қолданылатын амалдар.

Анықтама 3. (1) қатары D облысында мажорланған деп аталады, егер $\forall x \in D$ үшін :

$$|u_1(x)| \le \alpha_1, |u_2(x)| \le \alpha_2, \dots, |u_n(x)| \le \alpha_n, \dots$$

теңсіздігі орындалатындай,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots , \qquad (2)$$

таңбалары оң жинақты сандық қатар табылса.

Мысал 2.

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$$

қатары барлық сан осінде мажорланған екені анық, өйткені,

$\forall x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,\dots$, ал $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$ - қатары жинақты қатар (*мысал 5*).

D облысында мажорланған қатар, осы D облысында абсолютті жинақты. .

Анықтама 4. $[a;b]$ аралығында жинақты (1) қатары бірқалыпты жинақты деп аталады, егер барлық $n \ge N$ үшін $\forall \varepsilon > 0 : \exists N$,

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b] \text{ болса.}$$

Теорема 2. $[a;b]$ аралығында мажорланған (1) қатары осы кесіндіде бірқалыпты жинақты.

2-теоремадан мажорланған қатар болу бірқалыпты жинақтылықтан да күшті шарт екенін көреміз, яғни, бірқалыпты жинақталатын, бірақ мажорланған емес қатарлар табылады.

Теорема 3. (1) қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты және $S(x)$ - оның қосындысы болсын. Онда егер:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} u_i(x), \quad i=1,2,...$ - табылса, онда

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} u_1(x) + \lim_{x\to x_0} u_2(x) + ... + \lim_{x\to x_0} u_n(x) + ..., \qquad x_0 \in [a;b]$$

2. қатардың мүшелері $u_i(x), \quad i=1,2,...$ - $[a;b]$ аралығында үзіліссіз және $S(x)$ функциясы да $[a;b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда

$$\int_{x_0}^{x_1} S(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2(x)\,dx ... + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\,dx + ..., \quad x_0 \in (a;b),\ x_1 \in (a;b),$$ яғни,

қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

Теорема 4. Егер (1) қатары $[a;b]$ аралығында жинақты болса, $u_i(x) \in C^1[a;b], \quad i=1,2,...$, ал

$u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ...$ қатары $[a;b]$ аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ... \quad \forall x \in [a;b],$$

яғни, қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

Дәрежелік қатарлар.

Дәрежелік қатар функционалдық қатарлардың дербес түрі.

Анықтама 5. $(x-a)$ –ға қатысты дәрежелік қатар деп:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \tag{3}$$

түрінде берілген қатарды айтамыз, мұндағы $a_0, a_1, a_2, ...$ коэффиценттері – тұрақты сандар.

Егер $a=0$ болса, онда: $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{4}$$

Теорема 5. (Абель). $x=x_0$ болғанда (4) қатары жинақты болса, онда ол $|x|<|x_0|$ болғанда абсолютті жинақты; ал оның $x=x_0$ болғанда жинақсыз болуынан, $|x|>|x_0|$ болғанда жинақсыздығы шығады.

Абель теоремасынан: (4) қатары үшін жалғыз ғана R саны, $0 \le R \le \infty$, табылады, $|x|<R$ болғанда (2) қатары жинақты, ал $|x|>R$ үшін жинақсыз болатындай.

R саны дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы деп аталады, ал $(-R;R)$ - жинақтылық интервалы деп аталады. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ақырлы шегі табылса, онда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$

қатарына Даламбер белгісін қолдансақ,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xa_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L} = R \text{, яғни, } R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Дәл осылай, Коши белгісін қолдансақ: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Мысал 3. $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + \ldots$ қатарының жинақтылық облысын тап.

$a_n = \dfrac{1}{n}$ болғандықтан, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n=1}{n} = 1$ - жинақтылық радиусы. $x = \pm 1$ нүктелерінде жинақтылыққа зерттейміз.

$x = 1 \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$ - гармониялық қатар, жинақсыз болады.

$x = -1 \Rightarrow -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots$ -таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар, бұл жинақты қатар (*мысал 6*). Сонымен, берілген дәрежелік қатардың жинақтылық облысы: $[-1;1)$.

(3) қатарының жинақтылық интервалы $(a - R;\ a + R)$, мұндағы R - (4) қатарының жинақтылық радиусы.

D -кез келген бүтіндей (3) қатарының жинақтылық интервалының ішінде жататын кесінді болсын. Онда:

1. (3) қатары мажорланған (бірқалыпты жинақты) D кесіндісінде.
2. (3) қатарының қосындысы жинақтылық интервалында үзіліссіз.
3. (3) қатарын D кесіндісінде мүшелеп интегралдауға және қанша болса сонша рет мүшелеп дифференциалдауға болады, сонымен қатар, алынған дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы (3) қатарының жинақтылық интервалымен бірдей.

Мысал 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. Дәрежелік қатардың жинақталу аймағын тап.

Шешуі. $c_n = \dfrac{1}{n}$ болады, онда жинақтылық радиусы $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$;

(–1,1) – жинақтылық интервалы.

$x = -1$ болсын, онда берілген қатар: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ түрінде болады.

Бұл қатар шартты жинақты, себебі $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ жинақсыз және

а) $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

$x = 1$ болса, берілген қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ - гармониялық қатар және ол жинақсыз қатар. Сонымен, берілген қатар $x \in (-1,1)$ аралығында абсолютті жинақты, $x = -1$ болғанда шартты жинақты.

Мысал 5. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-2)}$.

Шешуі. $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$, $c_n\neq 0$ егер $n=3,4,...$ болса.

Онда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)}=1$.

Сонымен, $R=1$ - жинақтылық радиусы; $(-1,1)$ – жинақтылық интервалы.

Интервалдың шеткі нүктелерінде берілген қатарды жинақтылыққа зерттейік.

$x=-1$ болса:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n(n-2)}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$$

Бұл қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ жинақты қатарымен салыстырамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n(n-2)}:\frac{1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-2)}=1\neq 0\ .$$

Сонымен, салыстырудың екінші белгісі бойынша $x=-1$ болғанда қатар абсолютті жинақты.

Егер $x=1$ болса, онда берілген қатар мына түрде болады: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$.

Бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған қатар: $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$ жинақты қатар, ендеше жоғарыдағы таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты.

Сонымен, берілген қатар $x\in[-1,1]$ болғанда абсолютті жинақты.